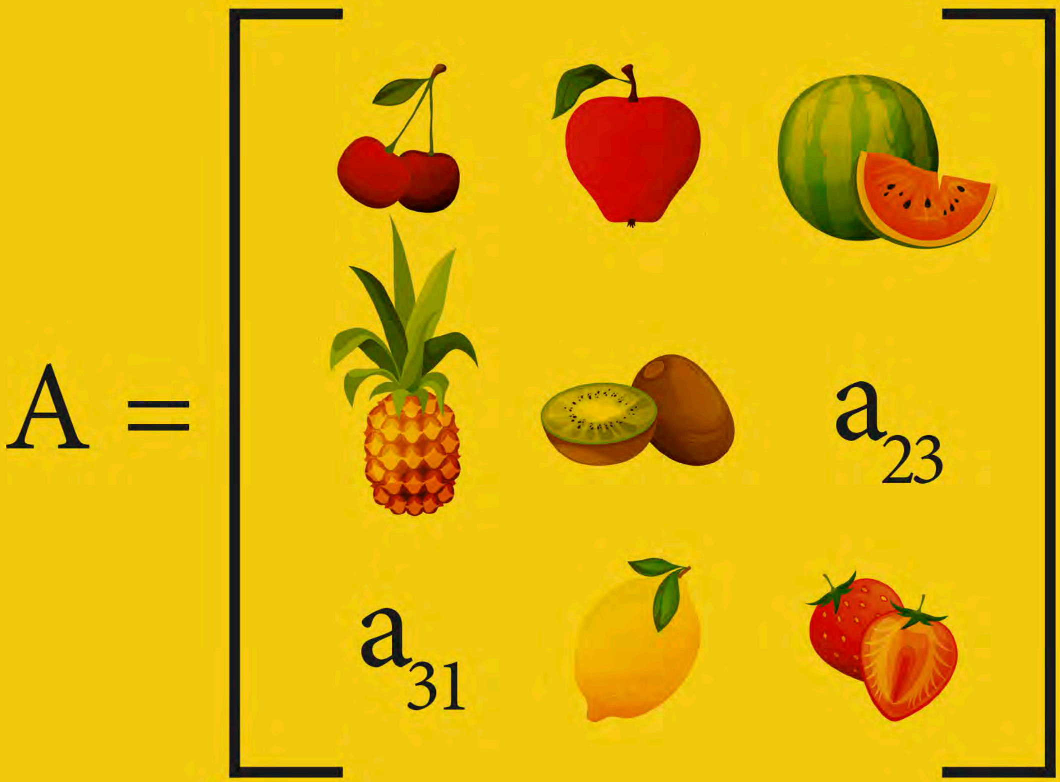
3.ª edición

José Manuel Casteleiro Villalba
Ramón Arilla Llorente
Carlos Queypo de Llano de León

Las matrices son fáciles

Aplicación del álgebra en la empresa



LIBROS PROFESIONALES DE EMPRESA

ESIC

Madrid, 2023

José Manuel Casteleiro Villalba
Ramón Arilla Llorente
Carlos Queypo de Llano de León

Las matrices son fáciles

Aplicación del álgebra en la empresa

3.ª Edición

ESIC

Primera edición: abril, 2010
Tercera edición: mayo, 2023

Las matrices son fáciles. Aplicación del álgebra en la empresa
José Manuel Casteleiro Villalba, Ramón Arilla Llorente y Carlos Queypo de Llano de León

Avda. de Valdenigriales, s/n
28223 Pozuelo de Alarcón (Madrid)
Tel.: 91 452 41 00
www.esic.edu/editorial
@EsicEditorial

ISBN: 978-84-19480-65-1
Depósito Legal: M-15566-2023

Diseño de cubierta: Balloon Comunicación
Maquetación: Santiago Díez Escribano
Lectura: Balloon Comunicación
Impresión: Gráficas Dehon

Un libro de

esic Editorial

Impreso en España – *Printed in Spain*

Este libro ha sido impreso con tinta ecológica y papel sostenible.

A mi mujer, Sol.
José Manuel Casteleiro

A Susana (madre e hija) y a Gonzalito.
Ramón Arilla

A Ana por ser mi soporte y motivación diaria y a Maite,
mi madre, por haberme ayudado a llegar hasta aquí.
Carlos Queypo de Llano

Índice

Prólogo al libro

Siempre que se pretende escribir un libro de una materia de la que existen muchos y muy buenos títulos en el mercado, se deberán tener presentes dos cosas, o se elabora un libro pensando que sea útil como soporte de un determinado programa, o se pretende introducir alguna mejora, aunque sea solo didáctica, que haga aumentar la claridad de los conceptos tratados. En este sentido, se introducen métodos didácticos sencillos para la perfecta comprensión de los mecanismos matemáticos del álgebra lineal, estableciendo una metodología específica. Por lo tanto, puede decirse que es un libro eminentemente práctico al que se le ha añadido la teoría necesaria, y creemos que suficiente, para entender los procesos matemáticos de esta materia, eliminando todas las demostraciones y corolarios que, aun siendo interesantísimos, creemos que dificultan esta primera aproximación a una materia tan importante en el estudio de las ingenierías.

Por otro lado, se puede decir que a un determinado nivel no existen materias difíciles, sino materias o mal explicadas o explicadas de forma compleja. Un ejemplo de esto lo tenemos en el desarrollo del cálculo diferencial, de la teoría de la relatividad, el cálculo integral o de cualquier otra teoría física o matemática desarrollada en los siglos XVII, XVIII y XIX. Por ejemplo, respecto al cálculo integral solo los muy avezados de la época eran capaces de entender lo que genios de la categoría de Leibniz, Gauss o Newton y otros se hallaban desarrollando. Hoy en día se podría decir que cualquier estudiante de bachillerato es muy capaz de entender estos conceptos. Esto debería bastar a cualquiera que pretenda obtener resultados en una materia científica. Otra cosa bien distinta son aquellas personas que nacen con una capacidad excepcional, estos son los llamados superdotados, y en un plano superior, los genios.

Además, hay que recordar a toda persona que se interese por el aprendizaje del álgebra que es imprescindible utilizar no solo la comprensión y el análisis, sino también, y en gran cantidad, la memoria deductiva. Casi con toda seguridad se puede decir que gran parte de los fracasos en esta materia se deben a que no se han aprendido de memoria los conceptos básicos de las matemáticas. Siempre he oído decir: de esto no me acuerdo, observando que cuando se lo recuerdas debidamente entiende lo que estás tratando de explicarle. En general, para poder recordar una fórmula o un proceso deductivo, es necesario repetirlo muchas veces, es decir, estudiarlo. Para ello disponemos de una ayuda inestimable que no poseen otras disciplinas y que permite almacenar estos conceptos de forma permanente. Estos son los ejercicios que sirven para entender mejor la teoría y para ayudarnos a pensar, por tanto, es preciso insistir en la necesidad de volver a hacer varias veces los mismos problemas, sobre todo los más complicados, y comprobarlos una y otra vez, como se han realizado y comprobado en este libro. También se ha realizado un esfuerzo considerable para explicar las cosas de una forma lo más clara posible. Este es el hilo conductor en la exposición de las teorías básicas del álgebra lineal, porque si a la dificultad intrínseca de las ideas en las que se basan las matemáticas, se le añade el idioma estructurado que le es propio, se le está añadiendo una dificultad más, es decir, que es necesaria una traducción a nivel de ideas de lo que en términos rigurosos se halla perfectamente estructurado, pero que para una persona que se inicia en estos estudios le resulta a veces de una gran complejidad entender y que en ocasiones le incita a dejar esta materia en aras del estudio de materias más comprensibles, trastocando su vocación inicial de ser ingeniero por otra carrera, cuando en realidad lo único que ocurre es que su escasa preparación en matemáticas básicas le hace concluir que no está capacitado para estos campos del saber. En algunos casos, muy pocos, esto es así, por desgracia, pero en la mayoría es simplemente una cuestión de dedicarle las horas necesarias para que el panorama cambie radicalmente, cosa que hemos comprobado en multitud de ocasiones en alumnos que se autocalificaban de «poco aptos para la matemática» y que acababan aprobando con cierta holgura y en algunos casos, bastantes, llegaban a la máxima calificación. La mayor parte de la operatoria matemática de los diversos capítulos de este libro, debido a la homogeneidad propia del álgebra, ha sido realizada mediante la técnica de la triangulación de matrices o mediante la consecución de ceros en filas y columnas en determinantes, operaciones ambas basadas en las operaciones elementales de filas y columnas. Este tratamiento facilita enormemente la comprensión de las distintas teorías de esta materia. Además, los signos introducidos en las citadas operaciones elementales permiten controlar y revisar los cálculos cómodamente. Todas las operaciones han sido realizadas paso por paso, sin importar que en muchas ocasiones se repitan conceptos y cálculos que, a pesar de que alguien pudiera calificarlos de innecesarios, repetitivos o machacones, han sido deliberadamente introducidos para que el lector medio pueda seguir las explicaciones con cierta facilidad. La experiencia docente nos enseña que en las asignaturas de matemáticas, al margen de la dificultad intrínseca de la materia, existe una gran distancia entre saber exponer correctamente las conclusiones a que se llega en un determinado tema teórico y su aplicación práctica en la resolución de los ejercicios planteados. Y para que el estudio resulte provechoso, será necesario contemplarlo de forma secuencial, por lo que se deberá empezar por asimilar correctamente los apartados correspondientes a la teoría y a los problemas resueltos para pasar a continuación a resolver los problemas propuestos.

José Manuel Casteleiro Villalba y Ramón Arilla Llorente

Introducción

La matemática es una materia de importancia capital en la comprensión de los procesos reales de los que se ocupa cualquier ciencia pura o aplicada. En los campos de la economía, el marketing y la empresa, que son los que nos interesan particularmente, el álgebra constituye una herramienta sumamente útil para ayudarnos a controlar los procesos de análisis de los mercados, en un mundo cada vez más interrelacionado y globalizado, donde los grandes volúmenes de cifras complican enormemente el control de las operaciones nacionales e internacionales. La creciente necesidad de las matemáticas ha hecho que aparezcan una serie de economistas cuantitativos que hasta hace poco constituían un grupo poco apreciado dentro de la profesión.

Siempre que se pretende escribir un libro de una materia de la que existen muchos y muy buenos títulos en el mercado, se deberán tener presentes dos cosas, o se elabora un libro pensando que sea útil como soporte de un determinado programa, o se pretende introducir alguna mejora, aunque sea solo didáctica, que haga aumentar la claridad de los conceptos tratados. En nuestro caso se dan las dos condiciones; en primer lugar, este libro servirá como soporte de la asignatura de Álgebra de ESIC University, y, en segundo lugar, se introducen métodos didácticos sencillos para la perfecta comprensión de los mecanismos matemáticos del álgebra lineal, estableciendo una metodología específica. En este sentido, puede decirse que es un libro eminentemente práctico, al punto que se podría definir como libro de problemas, al que se le ha añadido la teoría necesaria, y creemos que suficiente, para entender los procesos matemáticos de esta materia en su concepción más elemental, es decir, que se han eliminado todas las demostraciones y corolarios que, aun siendo interesantísimos, creemos que dificultan esta primera aproximación a una materia tan importante en el estudio de la economía, las ingenierías y la ciencias físicas que se ha titulado como introducción al álgebra lineal.

Este no es un libro de grandes teorías, ni siquiera un libro completo que incluya todos los teoremas relativos al tema, sino simplemente un libro para aprender a manejar con cierta soltura las matrices, de forma que constituya un MÉTODO DIDÁCTICO para enseñar este tipo de matemáticas de forma fácil y sistemática. Además es un LIBRO SECUENCIAL, por tanto conviene no avanzar excesivamente si no se tienen bien cimentados los conocimientos anteriores. Este es, por tanto, un libro que solo pretende un objetivo: ENSEÑAR A OPERAR CON MATRICES. Para ello se ha insistido en las simplificaciones, que han sido realizadas con todo lujo de detalles.

La mayor parte de la operatoria matemática de los diversos capítulos de este libro, debido a la homogeneidad propia del álgebra, ha sido realizada mediante la técnica de la triangulación de matrices o mediante la consecución de ceros en filas y columnas en determinantes, operaciones ambas basadas en las operaciones elementales de filas y columnas. Este tratamiento facilita enormemente la comprensión de las distintas teorías de esta materia. Además, los signos introducidos en las citadas operaciones elementales permiten controlar y revisar los cálculos cómodamente.

Todas las operaciones han sido realizadas paso por paso, sin importar que en muchas ocasiones se repitan conceptos y cálculos que, a pesar de que alguien pudiera calificarlos de innecesarios, repetitivos o machacones, han sido deliberadamente introducidos para que el lector medio pueda seguir las explicaciones con cierta facilidad.

La experiencia docente nos enseña que en las asignaturas de matemáticas, al margen de la dificultad intrínseca de la materia, existe una gran distancia entre saber exponer correctamente las conclusiones a que se llega en un determinado tema teórico y su aplicación práctica en la resolución de los problemas planteados. Y para que el estudio resulte provechoso, será necesario contemplarlo de forma secuencial, por lo que se deberá empezar por asimilar correctamente los apartados correspondientes a la teoría y a los problemas resueltos para pasar a continuación a resolver los problemas propuestos.

Además es un LIBRO AUTODIDÁCTICO; lo que pretende es facilitar el estudio de los diversos tipos de matrices que aborda, de forma que no se necesite ayuda alguna para su comprensión, por lo se ha utilizado la literatura más sencilla posible aunque en ocasiones resulte prolija, pero se ha seguido el consejo del genial físico teórico L. Boltzman, que dijo: «Cuando se hace ciencia, la elegancia se dejará para sastres y zapateros».

Por último, quisiera agradecer a las siguientes personas su apoyo, ayuda y comprensión:

A Eduardo Gómez Martín (presidente de ESIC) y a Simón Reyes Martínez Córdova (presidente de la Junta de Gobierno y presidente de Honor de ESIC), así como a ESIC Business & Marketing School y a su gran editorial, dirigida por Ignacio Soret, por haber hecho posible la edición de este libro.

José Manuel Casteleiro Villalba

Capítulo 1

Matrices

1.0 INTRODUCCIÓN

El objetivo del presente capítulo es dar a conocer una herramienta de cálculo sumamente útil para el tratamiento de ecuaciones lineales, además de mostrar los distintos tipos de matrices que se utilizan y su particular operatoria.

No hay que confundir una matriz con un determinante aunque tengan una notación y un aspecto parecido. El término «matriz» fue utilizado por vez primera por el matemático inglés James J. Sylvester (1814-1897) para designar una información numérica dispuesta según un conjunto de filas y columnas, mientras que el concepto de determinante, que no es más que un número, fue desarrollado con anterioridad y representa una categoría lógica totalmente diferente.

El cálculo matricial tiene un gran abanico de aplicaciones en física, ingeniería, economía, econometría, marketing, administración de empresas, etc.

1.1 DEFINICIÓN DE MATRIZ

Una matriz es un ordenamiento rectangular de escalares (números) en filas y columnas encerrados en un corchete o en un paréntesis.

Las matrices de las que vamos a hablar son **numéricas o alfanuméricas,** es decir, compuestas de **números** o de **números y letras.** Simbólicamente se escribirá:

$$\boxed{A = (A) = [A]} \tag{1.1}$$

Cuando no exista ambigüedad, no se utilizará ni el corchete ni el paréntesis, solo letras mayúsculas. En este libro se utilizará la notación entre corchetes. Por extensión, las matrices se pueden escribir:

$$A = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{Términos} \tag{1.2}$$

Se llama **TÉRMINO o elemento de una matriz a cada uno de sus valores.** Se representa por a_{ij}, donde el **primer subíndice** corresponde a la **fila** y el **segundo** a la **columna** donde se halla ubicado. Así, el término a_{35} se halla situado en la tercera fila, quinta columna.

Ejemplo 1.1 Señalar el término ubicado en la segunda fila y tercera columna (a_{23}) en la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 9a & b \\ b & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

el término que ocupa la segunda fila y tercera columna es el b.

1.1.1 Orden o dimensión de una matriz

El orden o dimensión de una matriz es el número de filas y columnas que posee. Se representa por (**m,n**), donde **m** es el número de **filas** y **n** el de **columnas.** Así, una matriz de orden (5,3) tendrá 5 filas y 3 columnas.

Ejemplo 1.2 Hallar el orden de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

la matriz tiene 3 filas y 5 columnas, luego el orden será (3,5).

1.2 IDENTIDAD DE MATRICES

Dos matrices son idénticas cuando tienen los mismos elementos. Esta relación se utiliza en algunos problemas como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.3 Hallar los valores a, b, c, d, e y f de la matriz A, sabiendo que es idéntica a la matriz B.

$$A=\begin{bmatrix} 2a+1 & 3e+1 & 2 \\ 2b & f & 5 \\ a-2c & a-d & 8 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Igualando ambas matrices, se tendrá:

$$\begin{bmatrix} 2a+1 & 3e+1 & 2 \\ 2b & f & 5 \\ a-2c & a-d & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Identificando los términos que guardan la misma posición relativa, se obtendrá:

$$2a+1=0 \longrightarrow a=-\frac{1}{2}$$

$$2b=3 \longrightarrow b=\frac{3}{2}$$

$$a-2c=4 \longrightarrow c=-\frac{9}{4}$$

$$3e+1=4 \longrightarrow e=1$$

$$f=0$$

$$a-d=1 \longrightarrow d=-\frac{3}{2}$$

1.3 TIPOS DE MATRICES

La nomenclatura de los distintos tipos de matrices es la siguiente:

1.3.1 Matriz rectangular

Es la que tiene distinto número de filas que de columnas.

$$\boxed{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \dots & \mathbf{a}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \mathbf{a}_{m3} & \dots & \mathbf{a}_{mn} \end{bmatrix}} \tag{1.3}$$

Orden de la matriz A (m,n).

Ejemplo 1.4 Hallar los órdenes de las siguientes matrices rectangulares:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 3 \\ 6 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

el orden de la matriz A es (4,2) y el de la matriz B (3,4).

1.3.2 Matriz fila

Es la matriz rectangular que solo tiene una fila.

$$\boxed{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \end{bmatrix}} \tag{1.4}$$

Esta matriz también se llama **vector fila.**

Ejemplo 1.5 Hallar el orden de la siguiente matriz fila:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

el orden es (1,4); 1 fila y 4 columnas.

1.3.3 Matriz columna

Es la matriz rectangular que solo tiene una columna. Se puede escribir de dos formas diferentes, con una llave o con corchetes.

$$\boxed{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} \\ \mathbf{a}_{21} \\ \mathbf{a}_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{a}_{m1} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{11} \\ \mathbf{a}_{21} \\ \mathbf{a}_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{a}_{m1} \end{Bmatrix}} \tag{1.5}$$

Esta matriz también se llama **vector columna.**

Ejemplo 1.6 Hallar el orden de la siguiente matriz columna:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

el orden será (4,1); 4 filas y 1 columna.

1.3.4 Matriz nula

Es la que tiene todos sus términos nulos. Puede tener **cualquier orden.**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

1.3.5 Matriz cuadrada

Es la que tiene igual número de filas que de columnas.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

orden (n,n), pero se suele escribir orden (n).

Ejemplo 1.7 Hallar el orden de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Como tiene tres filas y tres columnas, el orden será (3,3), pero como se indicó anteriormente se suele indicar con un solo número. En este caso, la matriz se dice que tiene orden 3.

1.3.5.1 Diagonales de una matriz cuadrada

Toda matriz cuadrada tiene **dos diagonales,** una de las cuales es llamada **diagonal principal** y la otra **diagonal secundaria.** En la figura se tendrá:

Diagonal principal **Diagonal secundaria**

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & a_{1n} \\ a_2 & a_2 & a_2 & . & a_{2n} \\ a_3 & a_3 & a_3 & . & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Las matrices rectangulares, lógicamente, **no tienen diagonales,** pero definiremos la diagonal de la **mayor matriz cuadrada que contenga** y la llamaremos para entendernos **pseudodiagonal.** Esta pseudodiagonal tiene una gran importancia en el cálculo, como tendremos ocasión de comprobar más adelante.

Ejemplo 1.8 Señalar la pseudodiagonal en las matrices A y B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -4 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 & 9 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 9 \\ 8 & 8 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

La mayor matriz cuadrada que contiene la matriz A es de orden 3, luego la pseudodiagonal será la señalada en la matriz:

Pseudodiagonal

$$A = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -4 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 & 9 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

De igual forma se obtendrá la pseudodiagonal en la matriz rectangular B, esto es:

Pseudodiagonal

$$B = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 9 \\ \hdashline 8 & 8 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

1.3.5.2 Traza de una matriz cuadrada

Es la suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada.

$$\boxed{\mathbf{Tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \ldots + a_{nn}}} \tag{1.9}$$

Ejemplo 1.9 Hallar la traza de la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

La traza de la matriz A será:

$$T_r(A) = 1 + 3 + 4 = 8$$

1.3.6 Matriz diagonal

Es la matriz cuadrada que solo tiene distintos de cero los elementos de la diagonal principal.

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}} \tag{1.10}$$

con a, b y c escalares cualesquiera.

Ejemplo 1.10 Escribir la matriz diagonal cuyos términos son 1, 3 y 4.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

1.3.7 Matriz escalar

Es la matriz diagonal cuyos términos son todos iguales entre sí y distintos de cero. En una matriz genérica de orden 3 será:

$$\boxed{\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{a}\end{bmatrix}} \tag{1.11}$$

donde a es un escalar.

Ejemplo 1.11 Escribir una matriz de orden 3 con el escalar 3.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

1.3.8 Matriz unidad

Es la matriz escalar cuvo valor es la unidad.

$$\boxed{\boldsymbol{I_n}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & . & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & . & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & . & \mathbf{0}\\ : & : & : & & :\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & . & \mathbf{1}\end{bmatrix}} \tag{1.12}$$

Se denota por ($\mathbf{I_n}$) con **n igual al orden,** es decir:

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ etc.}$$

1.3.9 Matriz opuesta

Se dice que una matriz es la opuesta de una matriz dada A, y se denota por (–A), cuando tiene todos los términos iguales y contrarios.

Ejemplo 1.12 Hallar la matriz opuesta de la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 & 3 \\ 6 & 0 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

La matriz opuesta de la matriz A será:

$$-A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 & -3 \\ -6 & 0 & 2 & -3 \\ -5 & 3 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

1.3.10 Matriz triangular superior

Se llama matriz triangular superior a toda matriz cuadrada cuyos términos situados por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$\boxed{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{a_2} & \mathbf{a_3} & \mathbf{a_4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b_2} & \mathbf{b_2} & \mathbf{b_4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c_3} & \mathbf{c_4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{d_4} \end{bmatrix}} \tag{1.13}$$

1.3.11 Matriz triangular inferior

Se llama matriz triangular inferior a toda matriz cuadrada cuyos términos situados por encima de la diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \qquad (1.14)$$

1.4 OPERACIONES CON MATRICES

Las operaciones con matrices que vamos a estudiar son las siguientes:

1. **Suma de matrices**
2. **Producto de un escalar por una matriz**
3. **Producto de matrices**

Veamos cada una por separado.

1.4.1 Suma algebraica de matrices

Para sumar o restar matrices deberán tener el **mismo orden**, y la operación se realizará **sumando los términos que ocupan igual posición en las matrices implicadas.** En esquema, y utilizando como ejemplo genérico matrices de tercer orden, se tendrá:

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \pm b_1 & a_2 \pm b_2 & a_3 \pm b_3 \\ a_4 \pm b_4 & a_5 \pm b_5 & a_6 \pm b_6 \\ a_7 \pm b_7 & a_8 \pm b_8 & a_9 \pm b_9 \end{bmatrix} \qquad (1.15)$$

Ejemplo 1.13 Hallar la suma de las matrices siguientes:

$$S = A + B - C$$

donde:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Sumando las matrices quedará:

$$S=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

1.4.1.1. Propiedades de la suma algebraica de matrices

Las propiedades de la suma de matrices son las siguientes:

A) Propiedad asociativa

La propiedad asociativa será:

$$\boxed{(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}} \tag{1.16}$$

Ejemplo 1.14 Demostrar, con las matrices del ejemplo anterior y de acuerdo con la propiedad asociativa, la siguiente operación de matrices:

$$(A + B) - C = A + (B - C)$$

1) Primera parte de la igualdad $(A + B) - C$

$$A+B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[A+B]-C=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad $A + (B - C)$

$$B-C=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$A+(B-C)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

B) Propiedad conmutativa

La propiedad conmutativa será:

$$\boxed{\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}} \qquad (1.17)$$

Ejemplo 1.15 Comprobar esta igualdad con las matrices A y B utilizadas en los problemas anteriores.

1) Primera parte de la igualdad $A + B$

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad $B + A$

$$B+A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

C) Elemento neutro 0

El elemento neutro es la matriz nula [0].

$$\boxed{\begin{matrix}\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}\\ \mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A}\end{matrix}} \qquad (1.18)$$

D) Elemento simétrico

El elemento simétrico es la matriz opuesta (–A).

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{A+(-A)=0} \\ \mathbf{(-A)+A=0} \end{array}} \tag{1.19}$$

1.4.2 Producto de un escalar por una matriz

El producto de un escalar k por una matriz A será el producto de dicho escalar por todos y cada uno de los términos de la matriz. Es decir:

$$\boxed{\mathbf{kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ kb_{21} & kb_{22} & \dots & kb_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ kc_{n1} & kc_{n2} & \dots & kc_{nm} \end{bmatrix}}} \tag{1.20}$$

Ejemplo 1.16 Realizar la operación 3A, siendo A una matriz de valor:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

el producto será:

$$3A = 3\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 12 \\ 15 & -12 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.17 Calcular la matriz C, sabiendo que:

$$C = 2A - 3B$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

operando, se tendrá:

$$C = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -12 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

NOTA 1.1

Si se detecta en una matriz que **todos sus términos son múltiplos de uno dado,** este se podrá sacar como **factor común.**

Ejemplo 1.18 La siguiente matriz A tiene todos sus términos múltiplos de 2, luego sacando factor común el 2 quedará:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 8 & 6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

1.4.2.1 Propiedades del producto de un escalar por una matriz

Las propiedades del producto de un escalar por una matriz son las siguientes:

A) *Propiedad distributiva del producto de un escalar por una matriz respecto de la suma de escalares*

Esta propiedad es la siguiente:

$$\boxed{(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{A}=\mathbf{aA}+\mathbf{bA}} \tag{1.21}$$

con a y b escalares cualesquiera.

Ejemplo 1.19 Comprobemos esta propiedad con la matriz A

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

y los escalares 2 y a. Con ello se tendrá:

$$(2+a)A=2A+aA$$

1) Primera parte de la igualdad *(2 + a)A*

$$(2+a)A=(2+a)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+a & -4-2a & 4+2a \\ 0 & 2+a & 0 \\ 6+3a & 0 & -4-2a \end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad $2A + aA$

$$2A+aA=2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}+a\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & -4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & -2a & 2a \\ 0 & a & 0 \\ 3a & 0 & -2a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+a & -4-2a & 4+2a \\ 0 & 2+a & 0 \\ 6+3a & 0 & -4-2a \end{bmatrix}$$

B) Propiedad distributiva del producto de un escalar por una matriz respecto de la suma de matrices

Esta propiedad es la siguiente:

$$\boxed{a(A+B)=aA+aB} \tag{1.22}$$

donde a es un escalar cualquiera.

Ejemplo 1.20 Comprobemos esta propiedad con a = 3 y las matrices A y B:

$$A=\begin{bmatrix}2&0&-1\\3&5&0\\0&1&1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}3&0&-2\\0&1&0\\2&0&3\end{bmatrix}$$

1) Primera parte de la igualdad $3(A+B)$

$$3(A+B)=3\left[\begin{bmatrix}2&0&-1\\3&5&0\\0&1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&0&-2\\0&1&0\\2&0&3\end{bmatrix}\right]=3\begin{bmatrix}5&0&-3\\3&6&0\\2&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&0&-9\\9&18&0\\6&3&12\end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad $3A + 3B$

$$3A+3B=3\begin{bmatrix}2&0&-1\\3&5&0\\0&1&1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}3&0&-2\\0&1&0\\2&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0&-3\\9&15&0\\0&3&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9&0&-6\\0&3&0\\6&0&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&0&-9\\9&18&0\\6&3&12\end{bmatrix}$$

C) Propiedad asociativa mixta

La propiedad asociativa mixta es la siguiente.

$$\boxed{a(bA)=(ab)A} \tag{1.23}$$

Ejemplo 1.21 Al igual que hicimos en los casos anteriores y utilizando las mismas matrices y los mismos escalares comprobaremos esta propiedad con la siguiente expresión:

$$3(aA) = (3a)A$$

1) Primera parte de la igualdad $3(aA)$

$$3(aA)=3\left(a\begin{bmatrix}2&0&-1\\3&5&0\\0&1&1\end{bmatrix}\right)=3\begin{bmatrix}2a&0&-a\\3a&5a&0\\0&a&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6a&0&-3a\\9a&15a&0\\0&3a&3a\end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad $(3a)A$

$$(3a)A=(3a)\begin{bmatrix}2&0&-1\\3&5&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6a&0&-3a\\9a&15a&0\\0&3a&3a\end{bmatrix}$$

D) Elemento unidad

El elemento unidad es el 1.

$$\boxed{\mathbf{1A = A}} \tag{1.24}$$

E) Elemento neutro

El elemento neutro es el 0.

$$\boxed{\mathbf{0A = 0}} \tag{1.25}$$

1.4.3 Producto de matrices

Para multiplicar dos matrices será necesario cumplir el siguiente requisito:

El número de columnas de la primera matriz deberá ser igual al número de filas de la segunda

Este requisito en términos de **orden** será:

$$\boxed{(m,\underbrace{p)(p}_{\text{iguales}},n)=(m,n)} \tag{1.26}$$

Donde el **orden de la 1.ª matriz es (m,p), y el de la 2.ª matriz es (p,n),** por tanto, el **orden de la matriz resultante será (m,n).**

La forma de operar dos matrices AB será la siguiente:

FILAS DE LA PRIMERA MATRIZ (A) POR COLUMNAS DE LA SEGUNDA MATRIZ (B)

es decir:

La **primera fila** de **A** por **todas las columnas** de **B** generará la **primera fila** de la matriz producto **AB.**

La **segunda fila** de **A** por **todas las columnas** de **B** generará la **segunda fila** de la matriz producto **AB.**

La **tercera fila** de **A** por **todas las columnas** de **B** generará la **tercera fila** de la matriz producto **AB,** y así sucesivamente.

Para entender cómodamente el proceso, utilizaremos una matriz genérica de tercer orden. Con dicha matriz la operación **AB** será como sigue:

$$AB=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

Fijémonos solo en la generación de la **primera fila** de la matriz producto:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 & a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

A continuación, nos fijaremos solo en la generación de la **segunda fila** de la matriz producto:

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ * & * & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} * & * & * \\ a_4b_1+a_5b_2+a_6b_3 & a_4c_1+a_5c_2+a_6c_3 & a_4d_1+a_5d_2+a_6d_3 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Por último, nos fijaremos solo en la generación de la **tercera fila** de la matriz producto:

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ a_7b_1+a_8b_2+a_9b_3 & a_7c_1+a_8c_2+a_9c_3 & a_7d_1+a_8d_2+a_9d_3 \end{bmatrix}$$

En general, se dice que en el **producto de dos matrices AB** la matriz **A premultiplica** a la matriz **B** y que la matriz **B postmultiplica** a la matriz **A.**

Ejemplo 1.22 Comprobar si son multiplicables las matrices A y B:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para comprobar si son o no multiplicables, se deberá observar que los órdenes de ambas matrices en la disposición AB cumplirán:

$$(6,\underbrace{3)(3}_{\text{iguales}},5)=(6,5)$$

es decir, como el orden de la primera es (6,3) y el orden de la segunda es (3,5), serán multiplicables y el orden de la matriz producto será (6,5).

En el caso contrario, es decir BA, no es posible, dado que no se cumple el requisito (1.4.3), es decir:

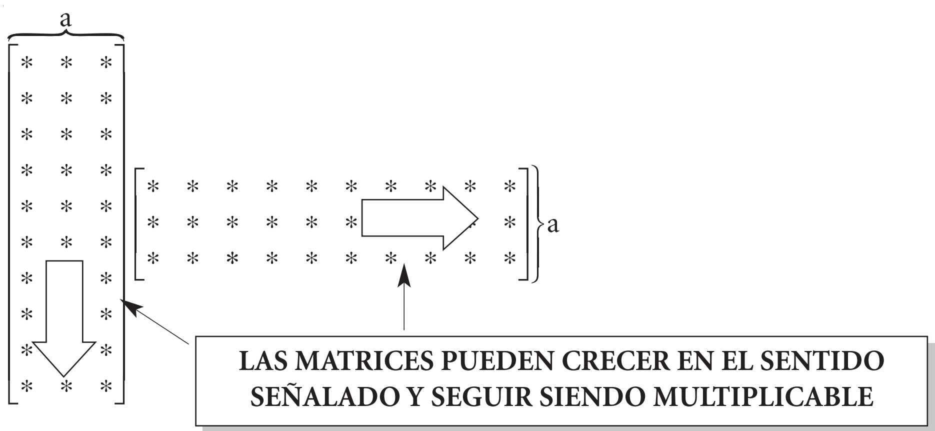
$$(3,\underbrace{5)(6}_{\text{distintos}},3)$$

de esto se deduce que el producto de matrices **no tiene en general la propiedad conmutativa,** esto es:

$$\boxed{\mathbf{AB \neq BA}} \tag{1.27}$$

Existe un tipo de matrices, denominados **conmutables, que sí cumplen la propiedad conmutativa.**

En el producto de dos matrices, el requisito (1.4.3) permite que las matrices que multiplicar puedan ser **tan grandes como se quiera** en el sentido señalado en el siguiente esquema:



Es decir, que mientras se cumpla que el **número de columnas de la primera (a)** sea igual al **número de filas de la segunda (a),** el producto de matrices podrá ser efectuado.

Ejemplo 1.23 Hallar el producto AB con las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

El orden de A es (5,3) y el de B es (3,2), luego el orden de la matriz producto será (5,2).

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (1)(2)+(-1)(-1)+(0)(0) & (1)(-2)+(-1)(1)+(0)(3) \\ (0)(2)+(0)(-1)+(2)(0) & (0)(-2)+(0)(1)+(2)(3) \\ (-2)(2)+(1)(-1)+(1)(0) & (-2)(-2)+(1)(1)+(1)(3) \\ (3)(2)+(1)(-1)+(-2)(0) & (3)(-2)+(1)(1)+(-2)(3) \\ (0)(2)+(3)(-1)+(-3)(0) & (0)(-2)+(3)(1)+(-3)(3) \end{bmatrix}$$

es decir:

$$AB=\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \\ -5 & 8 \\ 5 & -11 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

1.4.3.1 Propiedades del producto de matrices

Las propiedades del producto de matrices son las siguientes:

A) Propiedad asociativa

$$\boxed{(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})} \tag{1.28}$$

Ejemplo 1.24 Comprobemos esta propiedad con las matrices A y B del ejemplo anterior y una nueva matriz C de valor:

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

1) Primera parte de la igualdad $(AB)C$

Como AB es un producto conocido, se podrá poner:

$$(AB)C=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 0 & 6\\ -5 & 8\\ 5 & -11\\ -3 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 0 & 6\\ -5 & -2\\ 5 & -1\\ -3 & -12\end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad $A(BC)$

En primer lugar, calculemos BC:

$$BC=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

el resultado lo premultiplicamos por A, y queda:

$$A(BC)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -2\\ 0 & 3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & +2\\ -1 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 0 & 6\\ -5 & -2\\ 5 & -1\\ -3 & -12\end{bmatrix}$$

B) *Propiedad distributiva*

Existen las dos siguientes propiedades distributivas:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & (A+B)C = AC+BC \\ (2) & A(B+C) = AB+AC \end{array}} \qquad (1.29)$$

Ejemplo 1.25 Comprobemos la propiedad distributiva n.° 1 con las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1) Primera parte de la igualdad $(A + B)C$

Veamos si se puede efectuar la operación:

$$\left[(3,3)+(3,3)\right](3,1)=(3,3)(3,1)=(3,1)$$

sí se puede, luego:

$$(A+B)C=\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad $AC + BC$

$$AC+BC=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.26 Comprobemos la propiedad distributiva n.° 2

Esta segunda operación no se puede realizar con las mismas matrices, ya que el producto de matrices no goza de la propiedad conmutativa, como se observó anteriormente. Utilicemos las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}3\\ 6\\ 1\end{bmatrix}$$

Veamos si se puede efectuar la operación:

$$(3,3)\left[(3,1)+(3,1)\right]=(3,3)(3,1)=(3,1)$$

efectivamente se puede, luego procedamos a realizar la operación:

1) Primera parte de la igualdad $A(B + C)$

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 6\\ 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 6\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ 45\\ 8\end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad $AB + AC$

$$AB+AC=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 6\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 6\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\ 39\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ 45\\ 8\end{bmatrix}$$

C) Elemento neutro

Elemento neutro es la matriz unidad. Cualquier matriz multiplicada por la matriz unidad es ella misma.

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{AI=A}\\ \mathbf{IA=A}\end{array}} \qquad (1.30)$$

1.4.3.2 Matrices conmutables

Se dice que dos matrices son conmutables cuando cumplen la propiedad conmutativa:

$$\boxed{\mathbf{AB} = \mathbf{BA}} \tag{1.31}$$

Ejemplo 1.27 Comprobar si las siguientes matrices son conmutables:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

1) Producto AB

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 15 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$$

2) Producto BA

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 15 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$$

luego, son conmutables.

<u>**NOTA 1.2**</u>

Dos matrices cuadradas del mismo orden siempre son multiplicables, lo que no quiere decir que sean **conmutativas.**

Ejemplo 1.28 Comprobar que las siguientes matrices A y B no tienen la propiedad conmutativa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Producto AB

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

2) Producto BA

$$BA=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 5 & -1\end{bmatrix}$$

de forma que:

$$AB \neq BA$$

1.5 POTENCIA DE MATRICES

Para elevar una matriz a una potencia, se deberá multiplicar por sí misma tantas veces como indique el exponente. Es decir:

$$\boxed{\mathbf{A}^{\mathbf{n}}=\underbrace{\mathbf{AAA.....A}}_{\mathbf{n}}} \qquad (1.32)$$

Ejemplo 1.29 Hallar la tercera potencia de la siguiente matriz:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

multiplicándola tres veces por sí misma, se obtendrá:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 9\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 21\\ 0 & 8\end{bmatrix}$$

1.6 MATRIZ INVOLUTIVA

Se llama matriz involutiva a toda matriz que multiplicada por sí misma da la matriz unidad.

$$\boxed{\mathbf{AA = I}} \tag{1.33}$$

Ejemplo 1.30 Comprobar que la siguiente matriz es involutiva:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

En primer lugar, como la matriz es múltiplo de $\frac{1}{2}$, se sacará este factor común y se obtendrá:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

A continuación, multiplicándola por ella misma quedará:

$$A^2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+\left(\sqrt{3}\right)^2 & \sqrt{3}-\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-\sqrt{3} & 3+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.7 MATRIZ IDEMPOTENTE

Se llama matriz idempotente a toda matriz que multiplicada por sí misma da la misma matriz.

$$\boxed{\mathbf{A^2 = A}} \tag{1.34}$$

Ejemplo 1.31 Comprobar que la siguiente matriz es idempotente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Multiplicándola por ella misma, quedará:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2 & -2+1 \\ 4-2 & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

1.8 MATRIZ NIHILPOTENTE

Se llama matriz nihilpotente a toda matriz que multiplicada por sí misma da la matriz nula.

$$\boxed{\mathbf{A}^{n} = \mathbf{0}} \qquad (1.35)$$

Ejemplo 1.32 Comprobar que la siguiente matriz es nihilpotente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicándola por ella misma, quedará:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.9 OPERACIONES CON MATRICES PARTICIONADAS EN BLOQUES DE MATRICES

Toda matriz puede ser dividida o particionada en bloques de matrices trazando líneas discontinuas en su seno, de forma que la matriz resultante queda reducida a otra de un orden menor.

Cada elemento de esta nueva matriz es una **submatriz elemental.** Esta matriz particionada resultante puede ser operada de acuerdo con las reglas generales de la operatoria de matrices.

La partición de matrices **no es única,** sino que se pueden dividir en bloques de **diversas formas.**

Ejemplo 1.33 Dividir la matriz A de orden (6,5) en bloques de matrices de las siguientes maneras:

1) En una matriz resultante cuadrada de orden (2)

$$A=\left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ \hdashline 5 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 9 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

2) En una matriz resultante rectangular de orden (3,2)

$$A=\left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ \hdashline 5 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 9 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ \hdashline 6 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \\ \hdashline A_{31} & A_{32} \end{array}\right]$$

1.9.1 Suma de matrices particionadas

Para sumar matrices particionadas, los bloques deberán ser elegidos de forma que las matrices resultantes tengan el mismo orden.

Ejemplo 1.34 Sumar las siguientes matrices particionadas A y B:

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 4 \\ \hline 3 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \qquad B=\left[\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & -2 & 4 \\ \hline 0 & -1 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

la suma será:

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & A_{23}+B_{23} \\ A_{31}+B_{31} & A_{32}+B_{32} & A_{33}+B_{33} \end{bmatrix}$$

sumando cada uno de los bloques por separado, quedará:

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & A_{23}+B_{23} \\ A_{31}+B_{31} & A_{32}+B_{32} & A_{33}+B_{33} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 3 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 3 \\ \hline 1 & -1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 12 & -4 & 8 \\ \hline 3 & -2 & 3 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

con cualquier otra partición coherente hubiese salido el mismo resultado.

1.9.2 Producto de matrices particionadas

Para multiplicar matrices particionadas, se deberá tener en cuenta que **las particiones permitan la multiplicación de los bloques.** Se aplicará la regla del producto de matrices dada en el punto 1.4.3. Esta forma de operar puede resultar útil cuando multipliquemos **grandes matrices.**

Ejemplo 1.35 Calcular el producto de las matrices del problema anterior.

Particionando coherentemente las matrices A y B en matrices cuadradas de orden (2), quedará:

$$A=\left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ \hdashline 0 & 1 & 6 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \qquad B=\left[\begin{array}{cc:ccc} 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ \hdashline 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

El producto de ambas será:

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

En términos de órdenes de cada submatriz, tendremos:

$$A=\begin{bmatrix} (3,2) & (3,3) \\ (2,2) & (2,3) \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} (2,2) & (2,3) \\ (3,2) & (3,3) \end{bmatrix}$$

por lo tanto, multiplicando en términos de orden quedará:

$$AB=\begin{bmatrix} (3,2) & (3,3) \\ (2,2) & (2,3) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (2,2) & (2,3) \\ (3,2) & (3,3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (3,2)(2,2)+(3,3)(3,2) & (3,2)(2,3)+(3,3)(3,3) \\ (2,2)(2,2)+(2,3)(3,2) & (2,2)(2,3)+(2,3)(3,3) \end{bmatrix}$$

de donde la matriz resultante será:

$$AB=\begin{bmatrix} (3,2) & (3,3) \\ (2,2) & (2,3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (5,5) \end{bmatrix}$$

Realizando cada subproducto por separado, se tendrá:

1)

$$A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=\begin{bmatrix}1&3\\2&2\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\2&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&3&1\\2&0&0\\3&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&6\\4&4\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&-2\\2&-2\\5&-6\end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=\begin{bmatrix}10&4\\6&2\\5&-6\end{bmatrix}$$

2)

$$A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=\begin{bmatrix}1&3\\2&2\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&1\\2&1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&3&1\\2&0&0\\3&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&0\\6&-2&4\\3&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&6&10\\6&8&8\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}21&-4&10\\0&4&0\\21&2&2\end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=\begin{bmatrix}28&2&20\\6&12&8\\21&2&2\end{bmatrix}$$

3)

$$A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}=\begin{bmatrix}0&1\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\2&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&-2&4\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&-10\\0&2\end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}=\begin{bmatrix}6&-8\\-2&0\end{bmatrix}$$

4)

$$A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 6 & -2 & 4\\ 3 & 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 8 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 16 & -16\\ -6 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}=\begin{bmatrix}2 & 17 & -13\\ -5 & 8 & 4\end{bmatrix}$$

Ensamblando los bloques se tendrá:

$$AB=\begin{bmatrix}10 & 4 & 28 & 2 & 20\\ 6 & 2 & 6 & 12 & 8\\ 5 & -6 & 21 & 2 & 2\\ 6 & -8 & 2 & 17 & -13\\ -2 & 0 & -5 & 8 & 4\end{bmatrix}$$

1.10 TRASPOSICIÓN DE MATRICES

Se llama matriz traspuesta de una dada A a la que se obtiene de cambiar las filas por las columnas o viceversa. Se denota por A^t.

El orden de las matrices traspuestas se invierte, es decir, si el orden de A es (m,n) el de A^t es (n,m).

Ejemplo. 1.36 Hallar la traspuesta de la siguiente matriz:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 10\\ 2 & 9\\ 3 & 8\\ 4 & 7\\ 5 & 6\end{bmatrix}$$ orden (5,2)

cambiando las filas por las columnas se obtiene la matriz traspuesta:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{orden } (2,5)$$

1.10.1 Propiedades de las matrices traspuestas

Las propiedades de la trasposición de matrices son las siguientes:

1.ª Propiedad

Si se transpone dos veces una matriz A, se obtiene la misma matriz.

$$\boxed{\left[\mathbf{A}^t\right]^t = \mathbf{A}} \tag{1.36}$$

La trasposición es una operación involutiva.

2.ª Propiedad

La traspuesta de una suma de matrices es la suma de las matrices transpuestas.

$$\boxed{(\mathbf{A}+\mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t} \tag{1.37}$$

siendo A y B matrices del mismo orden.

Ejemplo 1.37 Comprobemos esta propiedad con las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1) Primera parte de la igualdad $(A + B)^t$

$$(A+B)^t=\left(\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&0&-1\\1&0&2\end{bmatrix}\right)^t=\begin{bmatrix}-1&3&-1\\1&1&4\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}-1&1\\3&1\\-1&4\end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad $A^t + B^t$

$$A^t+B^t=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&1\\0&0\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\3&1\\-1&4\end{bmatrix}$$

3.ª Propiedad

La traspuesta de un producto de matrices es el producto de las matrices transpuestas. En esta operación se **invierte el orden de multiplicación** de las matrices.

$$\boxed{\mathbf{(AB)^t=B^tA^t}} \qquad (1.38)$$

con A y B matrices multiplicables.

Ejemplo 1.38 Comprobemos esta propiedad con las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&3&0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2&2\\0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

1) Primera parte de la igualdad $(AB)^t$

$$(AB)^t=\left(\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)^t=\begin{bmatrix}4&1\\0&3\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}4&0\\1&3\end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad B^tA^t:

$$B^t A^t = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4.ª Propiedad

La traspuesta del producto de un escalar k por una matriz A es el producto de dicho escalar por la traspuesta de la matriz.

$$\boxed{(\mathbf{kA})^t = \mathbf{kA}^t} \qquad (1.38)$$

Ejemplo 1.39 Comprobemos esta propiedad con la siguiente matriz A y el escalar 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Primera parte de la igualdad $(kA)^t$

$$(3A)^t = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 9 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Segunda parte de la igualdad kA^t

$$3A^t = 3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}^t = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 9 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

1.11 MATRICES SIMÉTRICA Y ANTISIMÉTRICA

Se llama matriz SIMÉTRICA a toda matriz cuadrada que tiene iguales los términos que guardan una posición simétrica respecto de la diagonal principal. Lógicamente, los elementos de dicha diagonal pueden ser cualesquiera.

$$\boxed{A_{SIM} = \begin{bmatrix} A & a & b & d \\ a & B & c & e \\ b & c & C & f \\ d & e & f & D \end{bmatrix}} \qquad (1.40)$$

Diagonal principal (eje de simetría)

Toda matriz simétrica es igual a su traspuesta.

$$\boxed{A_{SIM} = A^{t}_{SIM}} \qquad (1.41)$$

Se llama matriz ANTISIMÉTRICA a toda matriz cuadrada que tiene iguales y de distinto signo los términos que guardan una posición simétrica respecto de la diagonal principal.

Los elementos de dicha diagonal **son nulos.**

$$\boxed{A_{ANTISIM} = \begin{bmatrix} 0 & -a & b & -d \\ a & 0 & -c & e \\ -b & c & 0 & f \\ d & -e & -f & 0 \end{bmatrix}} \qquad (1.42)$$

Diagonal principal (eje de simetría)

Toda matriz antisimétrica es igual a su traspuesta cambiada de signo

$$\boxed{A_{ANTISIM} = -A^{t}_{ANTISIM}} \qquad (1.43)$$

1.11.1 Descomposición de una matriz en suma de una matriz simétrica más una antisimétrica

Toda matriz cuadrada A puede ser descompuesta en suma de una matriz simétrica A_{SIM} y una antisimétrica $A_{ANTISIM}$. Esta descomposición es única.

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{A}_{SIM} + \mathbf{A}_{ANTISIM}} \tag{1.44}$$

donde:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A}_{SIM} &= \frac{1}{2}\left[\mathbf{A} + \mathbf{A}^t\right] \\ \mathbf{A}_{ANTISIM} &= \frac{1}{2}\left[\mathbf{A} - \mathbf{A}^t\right] \end{aligned}} \tag{1.45}$$

Ejemplo 1.40 Descomponer la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

en suma de una matriz simétrica y una antisimétrica. Según las fórmulas anteriores, se podrá escribir:

$$A_{SIM} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & -4 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_{ANTISIM} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Comprobación de la operación:

$$A_{SIM} + A_{ANTISIM} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & -4 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -6 & -4 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = A$$

1.12 OPERACIONES ELEMENTALES DE FILAS Y COLUMNAS

Las operaciones elementales entre filas o columnas en matrices son las siguientes:

1) **Cambiar de posición dos filas o dos columnas.** Esto lo representaremos con **un arco que señala las dos filas o columnas implicadas.**

Ejemplo 1.41 Cambiar de posición las filas 2.ª y 3.ª, y a continuación cambiar las columnas 1.ª por 3.ª en la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 14 & 4 & 8 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 7 & 4 \\ 2 & 14 & 4 & 8 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 6 & 4 \\ 4 & 14 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

2) **Multiplicar o dividir cualquier fila o columna por un número o constante cualquiera.** Esto lo representaremos **introduciendo el número o constante con que vayamos a operar en un paréntesis.**

Ejemplo 1.42 Multiplicar la primera fila por (–1), la segunda fila por (2) y la cuarta por (1/2), y a continuación multiplicar la segunda columna por (2) y la cuarta por (–3) en la siguiente matriz:

$$\begin{array}{c} (-1) \\ (2) \\ \\ (1/2) \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \simeq \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & (2) & & (-3) \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 12 & 12 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \simeq \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & 6 \\ 12 & 24 & 14 & -24 \\ 3 & 10 & 5 & -9 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3) **Sumar a una fila o columna otra multiplicada por un número.** Esto lo representaremos introduciendo en un **paréntesis** el número o constante que queramos operar, para a continuación con una **flecha acodada** indicar a qué **fila o columna se lo sumaremos. La flecha acodada siempre indica suma.**

Ejemplo 1.43 Multiplicar la primera columna por (–2), por (3) y por (–1) y sumársela respectivamente a la segunda, tercera y cuarta filas en la siguiente matriz:

$$\begin{array}{r} (-1)\quad(3)\quad(-2) \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2-2 & -1-2 & 2-6 & -2+4 \\ -3+3 & -1+3 & -3+9 & 4-6 \\ 1-1 & 2-1 & 4-3 & -3+2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Las mismas operaciones se pueden realizar sobre las columnas. Esta propiedad, junto a las anteriores, es la que permite **TRIANGULAR UNA MATRIZ.**

NOTA 1.3

Una de las ventajas de esta notación es que con ella es muy fácil **repasar los cálculos.** Para ver qué operación se ha realizado sobre una determinada matriz, todo lo que hay que hacer es **mirar la matriz anterior.**

1.13 MATRICES EQUIVALENTES

Una matriz es equivalente a otra cuando es obtenida de la anterior por operaciones elementales de filas y columnas.

1.14 FORMA DE OBTENER CEROS EN UNA FILA O COLUMNA DE UNA MATRIZ

Para transformar un término de una matriz en un cero, se observarán los dos casos siguientes:

1$^{\text{er.}}$ Caso. El pivote es un 1

Se llama **PIVOTE** al término que vamos a utilizar para conseguir **transformar un término en cero.** Cuando **el pivote es un 1,** bastará aplicar la transformación elemental 3 estudiada en el punto 1.12.

Ejemplo 1.44 Obtener la primera columna de ceros de la matriz siguiente, utilizando como pivote el primer término de la diagonal principal.

Pivote

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

mediante operaciones elementales de filas se obtendrá:

$$(-1) \quad (3) \quad (-2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2.° Caso. El pivote es un número cualquiera

En este caso se puede proceder de cualquiera de las dos formas diferentes siguientes:

1.ª Forma

Para conseguir hacer ceros en los términos de la primera columna, se multiplicará la primera fila por unas **fracciones** formadas por el **pivote,** que constituye el **denominador,** siendo los **numeradores** cada uno de **los valores de la primera columna cambiados de signo.**

Ejemplo 1.45 Hacer ceros en la primera columna de la siguiente matriz:

Pivote

$$\left(-\frac{4}{3}\right)\ \left(\frac{5}{3}\right)\ \left(-\frac{2}{3}\right)\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ -5 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -\frac{13}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{25}{3} & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

2.ª Forma

En esta segunda forma, los ceros en la primera columna se consiguen en dos **pasos.**

1$^{er.}$ paso) Se multiplican todas **las filas, excepto la del pivote, por dicho pivote,** excepto las que sean múltiplos de este.

2.º paso) Se multiplica **la primera fila** por los valores de **la primera columna cambiados de signo (–2),(5) y (–4) y se suman** a cada uno de los valores de **las filas correspondientes** como indican las flechas acodadas.

Ejemplo 1.46 Hacer ceros en la primera columna de la matriz anterior:

Pivote 1$^{er.}$ PASO 2.º PASO

$$\begin{array}{c} \\ (3) \\ (3) \\ (3) \end{array}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ -5 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \simeq (-4)\ (5)\ (-2)\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 6 & -9 & 6 & -6 \\ -15 & 15 & -9 & 12 \\ 12 & 6 & 12 & -9 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -13 & 0 & -2 \\ 0 & 25 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Conclusión:

Esta **segunda forma parece mejor que la primera,** por cuanto **no aparecen fracciones** en la matriz resultante. Si en la matriz obtenida de la primera forma se multiplican por 3 todas las filas en las que aparecen fracciones, aparecen los valores obtenidos en la segunda forma.

1.15 TRIANGULACIÓN DE MATRICES

Triangular una matriz es conseguir un triángulo de ceros, superior o inferior, por medio de operaciones elementales de filas y columnas, utilizando los procedimientos estudiados en el punto 1.12. Para ello se trabaja con la **diagonal principal, haciendo ceros en todas y cada una de las columnas situadas debajo de la citada diagonal principal,** como se explica en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.47 Transformar la siguiente matriz A en una matriz triangular superior:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Después de indicar claramente la **diagonal principal con una línea de puntos,** se empezará el cálculo con el **primer valor de dicha diagonal principal** que tomaremos como **pivote.** Operando con **transformaciones elementales de filas,** se tendrá:

Pivote

$$\begin{matrix} (-1) & (3) & (-2) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Una vez conseguida la **primera columna de ceros,** nos fijamos en el **segundo valor de la diagonal principal** que tomaremos como **pivote.** Este ha resultado ser un 3 (no es necesario fijarse en el signo, este se ajustará posteriormente). A continuación lo primero que haremos será **multiplicar por dicho pivote las dos últimas filas,** de acuerdo con los dos pasos expuestos en el punto 1.14 2.º Caso 2.ª Forma).

Pivote

1.^{er} PASO

$$\begin{array}{c} \\ \\ (3) \\ (3) \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 18 & -6 \\ 0 & 12 & 9 & 15 \end{bmatrix}$$

Seguidamente **multiplicaremos el pivote por los valores de la segunda fila,** eso es (2) y (4), y sumándoselas a las filas 3.ª y 4.ª, quedará:

2.º PASO

$$\begin{array}{c} \\ (4)(2) \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 18 & -6 \\ 0 & 12 & 9 & 15 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 23 \end{bmatrix}$$

Una vez conseguida la segunda columna de ceros, se procederá a conseguir la **tercera,** para ello el **pivote** será el **tercer valor de la diagonal principal** (10). Luego tendremos que **multiplicar la última fila por dicho pivote** y terminar la operación como se indica en este ejemplo:

Pivote

1.^{er} PASO 2.º PASO

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ (10) \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 23 \end{bmatrix} \simeq \begin{array}{c} \\ \\ (7) \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -70 & 230 \end{bmatrix}$$

de donde obtendremos **la matriz triangulada** siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 216 \end{bmatrix}$$

1.16 CÁLCULO DEL MÁXIMO TRIÁNGULO DE CEROS EN MATRICES RECTANGULARES

Las matrices rectangulares no pueden ser trianguladas, puesto que no poseen diagonal principal como es lógico, sin embargo, se puede hallar el **mayor triángulo posible de ceros** utilizando la **pseudodiagonal** definida en 1.3.5.1, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.48 Hallar el máximo triángulo de ceros en la siguiente matriz rectangular A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Como el orden de la matriz es (3,6), el máximo triángulo de ceros será el correspondiente a **una matriz cuadrada de orden 3** señalada con **una línea de puntos vertical,** esto es:

pseudodiagonal

Pivote **Pivote**

$$\begin{array}{c} (-2) \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \simeq \begin{array}{c} \\ (-3) \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 15 & 3 & 0 & 15 \end{array}\right]$$

de esta forma se ha obtenido el máximo triángulo de ceros posible.

Si **la matriz rectangular es vertical**, caben dos posibilidades, o se **traspone la matriz** y se realiza el cálculo como en el problema anterior, o se halla **el máximo triángulo de ceros directamente**, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.49 Hallar el máximo triángulo de ceros en la siguiente matriz rectangular A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Como el orden de esta matriz es (6,3), **el máximo triángulo de ceros posible es el que se obtiene trazando una línea de puntos horizontal** para señalar **la máxima matriz de orden 3,** como se observa en la figura:

pseudodiagonal

Pivote **Pivote** **Pivote**

$$(-2)(-1)(-2)\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \\ \hdashline 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{array}\right] \simeq (4)(-1)(7)\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ \hdashline 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 \end{array}\right] \simeq =(-1)\left(\frac{-3}{15}\right)\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 15 \\ \hdashline 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{array}\right]$$

está claro que esta última operación es **innecesaria** porque de cualquier forma resultará:

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 15 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se observa que **por debajo de la línea de puntos todos los términos son nulos.**

Conclusión

A la vista de estos dos procedimientos se podría afirmar que, siempre que lo permita el problema, **se trabaja mejor con la matriz «apaisada»**, por cuanto se realiza un menor número de operaciones.

1.17 PROBLEMAS RESUELTOS

Problema n.º 1

Hallar la matriz A sabiendo que es igual a la matriz B.

$$A=\begin{bmatrix}1 & a-2 & 0 & 2\\ 9 & 0 & d-1 & 0\\ 7 & 3-b & c+a & 4\\ 4 & e+3 & f & 2\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 9 & 0 & 3 & 0\\ 7 & 0 & 2 & 4\\ 4 & 3 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{bmatrix}1 & a-2 & 0 & 2\\ 9 & 0 & d-1 & 0\\ 7 & 3-b & c+a & 4\\ 4 & e+3 & f & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 9 & 0 & 3 & 0\\ 7 & 0 & 2 & 4\\ 4 & 3 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

Indicación: igualar los términos que guardan la misma posición relativa.

$$\begin{aligned}
a-2=1 &\longrightarrow a=3\\
d-1=3 &\longrightarrow d=4\\
3-b=0 &\longrightarrow b=3\\
c+a=2 &\longrightarrow c=-1\\
e+3=3 &\longrightarrow e=0\\
f=5 &
\end{aligned}$$

Problema n.º 2

Hallar la traza de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$T_r(A) = 2 + 2 + 3 = 7$$

Problema n.º 3

Hallar el resultado de la siguiente operación matricial:

$$A + B - C$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Problema n.º 4

Realizar la siguiente operación matricial:

$$3A + B(A + 2C)$$

donde:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Solución:

$$3A+B(A+2C)=3A+BA+2BC$$

$$3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 17 & 0\\ 22 & 20 & 0\\ 13 & 23 & 3\end{bmatrix}$$

Problema n.º 5

Con las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 0\\ 3\end{bmatrix}$$

¿es posible realizar las siguientes operaciones?:

$$AB \quad \text{y} \quad BA$$

Solución:

Sí es posible efectuar las dos operaciones, puesto que el orden de la matriz A es (1,4) y el de la matriz B (4,1), por tanto:

1) Orden operación AB

$$(1,4)\ (4,1) = (1,1)$$

Producto AB

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

2) Orden operación BA

$$(4,1)\ (1,4) = (4,4)$$

Producto BA

$$BA = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Problema n.º 6

Realizar la siguiente operación matricial:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$